ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15 (ΜΕΤΡΗΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ)

Έστω $f,g : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$

Ορισμοί

$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$

$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$

Θετικό μέρος της f: $f^+ = f \vee 0$

Αρνητικό μέρος της f: $f^- = f \vee 0$

Χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου A

$\chi_A : \mathbb{R}^n \to \{0,1\}$ με τύπο

$$\chi_A = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Ορισμός: Έστω $A \in \mathcal{A}$ και $f : A \to \tilde{\mathbb{R}}$.
Η f λέγεται μετρήσιμη στο A αν $\forall \sigma \in \mathbb{R}$
το σύνολο $K_f(\sigma) = \{x \in A : f(x) > \sigma\} = f^{-1}((\sigma, +\infty))$ είναι
μετρήσιμο

(Πιο γενικά αν έχουμε $(X, \mathcal{A})$ και $(Y, \mathcal{T})$ σ-άλγεβρα τοπολογία
τότε $f : X \to Y$ μετρήσιμη αν αντιστρέφει τα ανοικτά
σε μετρήσιμα σύνολα).

$\mathcal{M}(A) \equiv$ Το σύνολο των μετρήσιμων στο A συναρτήσεων

Πρόταση
Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής τότε είναι μετρήσιμη
δηλ. ισχύει $C(A, \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}(A)$

Πρόταση
$f, g \in \mathcal{M}(A)$, $f, g : A \to \tilde{\mathbb{R}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

i) $f \vee g \in \mathcal{M}(A)$ iv) $f^+ \in \mathcal{M}(A)$ vii) $\alpha f \in \mathcal{M}(A)$

ii) $f \wedge g \in \mathcal{M}(A)$ v) $f^- \in \mathcal{M}(A)$

iii) $f + g \in \mathcal{M}(A)$ vi) $|f| \in \mathcal{M}(A)$

Απόδειξη

i) $K_{f \vee g}(\sigma) = \{x \in A : (f \vee g)(x) > \sigma\} =$

$= \{x \in A : f(x) > \sigma \text{ ή } g(x) > \sigma\} =$

$= \{x \in A : f(x) > \sigma\} \cup \{x \in A : g(x) > \sigma\} =$

$= K_{f}(\sigma) \cup K_g(\sigma)$

ii) όμοια

iii) $K_{f+g}(\sigma) = \{x \in A : (f+g)(x) > \sigma\}$

$x \in K_{f+g}(\sigma) \Rightarrow f(x) + g(x) > \sigma \Rightarrow f(x) > \sigma - g(x)$

Μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών υπάρχει ένας ρητός

$\exists r_x \in \mathbb{Q}$: $f(x) > r_x$ και $r_x > \sigma - g(x)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) > r_x$ και $g(x) > \sigma - r_x$

$\Rightarrow x \in K_f(r_x)$ και $x \in K_g(\sigma - r_x)$

$\Rightarrow x \in K_f(r_x) \cap K_g(\sigma - r_x)$

Οπου,

$$K_f(r_x) \cap K_g(\sigma - r_x) \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left[K_f(r) \cap K_g(\sigma - r)\right]$$

Αντίστροφα

Εστω $x \in \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left[K_f(r) \cap K_g(\sigma - r)\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists r_0 \in \mathbb{Q}$: $x \in K_f(r_0) \cap K_g(\sigma - r_0)$ και

με αντίστροφες συνεπαγωγές καταλήγουμε όμοια στο ότι $x \in K_{f+g}(\sigma)$

iv) $f = f^+ - f^-$

vi) $|f| = f^+ + f^-$.

ΛΗΜΜΑ:

Αν $f \in \mathcal{M}(A)$ τοτε $\forall \sigma \in \mathbb{R}$ τα ακόλουθα σύνολα είναι μετρήσιμα:

$K_1 = \{x \in A : f(x) \leq \sigma\}$

$K_2 = \{x \in A : f(x) = \sigma\}$

$K_3 = \{x \in A : f(x) < \sigma\}$

$K_4 = \{x \in A : f(x) \geq \sigma\}$.

Αποδ

$K_1 = A - K_f(\sigma) \in \mathcal{A}$

$$K_2 = \bigcap_{v \in \mathbb{N}} \left[\{x \in A : f(x) > \sigma - \tfrac{1}{v}\} \cap \{x \in A : f(x) \leq \sigma + \tfrac{1}{v}\}\right] \in \mathcal{A}$$

$K_3 = K_1 - K_2 \in \mathcal{A}$

$K_4 = A - K_3 \in \mathcal{A}$

vii) Αν $\alpha > 0$ και $\sigma \in \mathbb{R}$ τότε

$K_{af}(\sigma) = \{x \in A : \alpha f(x) > \sigma\} = \{x \in A : f(x) > \frac{\sigma}{\alpha}\} = K_f(\frac{\sigma}{\alpha}) = K_4$

αν $\alpha < 0$ τοτε

$K_{af}(\sigma) = \{x \in A : \alpha f(x) > \sigma\} = \{x \in A : f(x) < \frac{\sigma}{\alpha}\} = K_3 \in A$

αν $\alpha = 0$, $\sigma < 0$

$K_{af}(\sigma) = \{x \in A : 0 > \sigma\} = A$

αν $\alpha = 0$, $\sigma \geq 0$

$K_{af}(\sigma) = \emptyset$

Προταση

Για $f, g \in \mathcal{M}(A)$ και $f, g : A \to \tilde{\mathbb{R}}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$

τοτε

i) $f^2 \in \mathcal{M}(A)$ και ii) $f \cdot g \in \mathcal{M}(A)$

Αποδειξη

Ας ειναι ενα $\sigma \in \mathbb{R}$

i) • Αν $\sigma < 0$

$K_{f^2}(\sigma) = \{x \in A : (f^2)(x) > \sigma\} = \{x \in A : f^2(x) > \sigma\} = A$

• Αν $\sigma \geq 0$

$K_{f^2}(\sigma) = \{x \in A : f^2(x) > \sigma\} = \{x \in A : f(x) > \sqrt{\sigma}\} \cup \{x \in A : f(x) < -\sqrt{\sigma}\}$.

ii) $f \cdot g = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - (f^2 + g^2)\right) \in \mathcal{M}(A)$

Προταση

Αν (f_ν) ακολουθια μετρησιμων στο A συναρτησεων

Τοτε και g, h, G, H

$g = \bigvee f_\nu$, a.e. A a.e = σχεδον παντου

$h = \bigwedge f_\nu$, a.e. A

$G = \limsup f_\nu$ a.e. A

$H = \liminf f_\nu$ a.e. A

Ειναι μετρησιμες

Αποδειξη

$g(x) = \sup f_\nu(x) \quad , x \in A \setminus E$

$\forall \sigma \in \mathbb{R}$:

$$k_g(\sigma) = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \{x \in A \setminus E : f_\nu(x) > \sigma\} \cup \overbrace{\{x \in E : g(x) > \sigma\}}^{\text{έχει μηδενικό μέτρο}} =$$

$$= \bigcup_{\nu=1}^{\infty} [k_{f_\nu}(\sigma) \setminus E] \cup \{x \in E : g(x) > \sigma\},$$

$$k_h(\sigma) = \{x \in A \setminus E : \inf f_\nu(x) > \sigma\}$$

$$h = \wedge f_\nu = -(-\wedge f_\nu) = -\vee(-f_\nu)$$

$$G(x) = \bigwedge_k \bigvee_{\nu \geq k} f_\nu(x) \in \mathcal{M}(A)$$

$$H(x) = \bigvee_k \bigwedge_{\nu \geq k} f_\nu(x) \in \mathcal{M}(A)$$

Πόρισμα

Αν (f_ν) ακολουθία μετρήσιμων στο A
και f συνάρτηση εδώ
$f = \lim f_\nu$ a.e. A
τότε f μετρήσιμη στο A

Απόδειξη

$f = \lim f_\nu = \limsup f_\nu$, a.e. A

Πόρισμα

Αν $f : A \to \mathbb{R}$ ημισυνεχής τότε $\in \mathcal{M}(A)$

πχ

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right), & x \in \mathbb{R}^* \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ορισμός: $f : A \to \mathbb{R}$

$x_0 \in A$: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)$:

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} f(x) > f(x_0) - \varepsilon & \text{αν ισχύει αυτό τότε άνω ημισυνεχής} \\ f(x) < f(x_0) + \varepsilon & \text{αν ισχύει αυτό τότε κάτω ημισυνεχής} \end{cases}$

συμπεραίνουμε $\Rightarrow \begin{cases} \liminf f(x) \geq f(x_0) \\ \limsup f(x) \leq f(x_0) \end{cases}$

Θεώρημα (Lusin)

Έστω A μετρήσιμο και $V(A) < +\infty$
$f \in \mathcal{M}(A)$. Η f περίπου συνεχής (δηλ. $(\forall \varepsilon>0)(\exists F \subseteq A$ κλειστό$)$
ώστε $V(A \setminus F) < \varepsilon$ και f συνεχής$)$

Απόδειξη

$\mathbb{Q}$ ως αριθμήσιμο γράφεται: $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots\}$
Τότε $\forall \lambda \in \mathbb{N}$: $B(r_n, \frac{1}{\lambda})$ $n \in \mathbb{N}$
$A_n = f^{-1}(B(r_n, \frac{1}{\lambda})) \Rightarrow A_n$ ανοιχτό
$A_n = \{x \in A : f(x) < r_n + \frac{1}{\lambda}\} \cap \{x \in A : f(x) > r_n - \frac{1}{\lambda}\}$
$\cup A_n = A$
κατασκευάζουμε την ακολουθία
$B_n = A_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}), n \in \mathbb{N}$ με $\cup B_n = A$ ξένα
$\sum V(B_n) = V(\cup B_n) = V(A) < +\infty$ ① ανά δύο
Άρα, η σειρά των μέτρων των B_n συγκλίνουσα
συνεπώς, $(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})$ ώστε $\sum_{n=k+1}^{\infty} V(B_n) < \varepsilon / 2^{\lambda+1}$ ②
$\forall n = 1, 2, \dots, k$ $\exists$ κλειστό $F_{n,\lambda} \subseteq B_n$:
$V(B_n \setminus F_{n,\lambda}) < \frac{\varepsilon}{k \cdot 2^{\lambda+1}}$

$F_\lambda := \bigcup_{n=1}^{k} F_{n,\lambda}$ και $g_\lambda(x) := \sum_{n=1}^{k} r_n \chi_{B_n}(\lambda)$.

$$V(A \setminus F_\lambda) = V\left[\left(\bigcup_{n}^{\infty} B_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{k} F_{n,\lambda}\right)\right] \le$$

$$\le V\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} B_n\right) + V\left[\left(\bigcup_{n=1}^{k} B_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{k} F_{n,\lambda}\right)\right] <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2^{\lambda+1}} + \left[\bigcup_{n=1}^{k} (B_n \setminus F_{n,\lambda})\right] =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2^{\lambda+1}} + \sum_{n=1}^{k} V(B_n \setminus F_{n,\lambda}) < \frac{\varepsilon}{2^{\lambda+1}} + \frac{k\varepsilon}{k 2^{\lambda+1}} = \frac{\varepsilon}{2^\lambda} \quad ③$$

$$F = \bigcap_{\lambda=1}^{\infty} F_\lambda . \quad V(A \setminus F) = V(A \cap F^c) = V\left[A \cap \left(\bigcup_{\lambda=1}^{\infty} F_\lambda^c\right)\right] =$$

$$= V\left[\bigcup_{\lambda=1}^{\infty} (A \setminus F_\lambda)\right] \le \sum_{\lambda=1}^{\infty} V(A \setminus F_\lambda) < \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^\lambda} = \varepsilon$$

Έστω τώρα $x \in F \Rightarrow x \in F_\lambda$, $\forall \lambda \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists n_\lambda : x \in F_{n_\lambda, \lambda} \subseteq B_{n_\lambda} \subseteq A_{n_\lambda}$

$g_\lambda(x) = v_{n_\lambda}$

Έτσι, $f(x) \in B(v_{n_\lambda}, \frac{1}{\lambda}) = B(g_\lambda(x), \frac{1}{\lambda})$

Συνεπώς,

$|f(x) - g_\lambda(x)| < \frac{1}{\lambda}$, $x \in F$, $\lambda \in \mathbb{N}$

Έστω $y \in F$, και $\eta > 0$ τότε $\exists \lambda_0 > \frac{3}{\eta}$

Ορίζω το $\Delta = g_{\lambda_0}^{-1}(B(g_{\lambda_0}(y), \frac{1}{\lambda_0})) \cap F$

Αν $x \in \Delta$ τότε

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - g_{\lambda_0}(y)| + |g_{\lambda_0}(y) - g_{\lambda_0}(x)| + |g_{\lambda_0}(x) - f(x)| < \frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_0} = \frac{3}{\lambda_0} < \eta$$